UNA APLICACION DE LAS CADENAS INCIERTAS DE KAUFMANN Y GIL ALUJA FRENTE A LAS CADENAS DE MARKOV AL CONTROL DE GESTION DE TESORERIA DE LAS EMPRESAS[1]

Autores: Enrique López González y Cristina Mendaña Cuervo
Departamento de Dirección y Economía de la empresa
Universidad de León
Campus de Vegazana s/n
E 24071 León (España)
Tfno.: (987) 20 10 52
Fax: (987) 21 01 98

Resumen: En el presente trabajo se realiza un análisis comparativo entre las cadenas inciertas de Kaufmann y Gil Aluja y las cadenas estocásticas de Markov en su aplicación al control de gestión de la liquidez, interesándose por contrastar la validez de estos instrumentos operativos, en orden a evaluar distintas alternativas de sistemas de control de la tesoreria de la empresa, atendiendo al ambiente aleatorio o incierto en que se desarrolla.

Palabras Clave: Kaufmann and Gil Aluja Fuzzy Chains, Markov Chains, Fuzzy Cash Management.

1. Introducción

La complejidad de los problemas que la gestión de las empresas plantea hace cada vez más difícil tomar decisiones sin la ayuda de medios adecuados de tratamiento de la información y de técnicas que la ciencia va aportando.

En este sentido, la teoría markoviana es una de las aplicaciones más elegantes de la teoría de probabilidades. No obstante, existen situaciones donde no podemos emplear probabilidades, como cuando nos situamos en la incertidumbre en lugar de la aleatoriedad, pero aún en este caso es posible el tratamiento de la información.

De acuerdo con lo anterior, nuestro trabajo va a consistir en llevar a cabo un estudio comparativo entre las cadenas inciertas de Kaufmann y Gil Aluja y las cadenas estocásticas, referido a la problemática que presenta para el control de gestión empresarial la tesorería, esto es, la administración de las disponibilidades de efectivo de las empresa, donde se presentan tres problemas principales: primero, no mantener saldos de liquidez ociosos (es decir, produciendo una rentabilidad por debajo de una alternativa mejor conseguible); segundo, no financiar descubierto a tasas más altas que otras posibles; y tercero, evitar que de forma simultánea se esté

[1]Investigación financiada con una Ayuda de la Junta de Castilla y León. (P.I. nº 1402/90).

utilizando una línea de financiación a tipo alto y se tengan recursos excedentes a tipos menores.

En la Figura 1 se ilustra un sistema típico de gestión de la liquidez. Diariamente pueden tener lugar flujos monetarios positivos y negativos. En cuanto a los primeros, pueden servir para cubrir los segundos cuando éstos se produzcan, pero puede existir un periodo de tiempo entre unos y otros en el cual sería absurdo mantener saldos de caja ociosos, tal como se mencionó anteriormente.

Fig. 1. Sistema de gestión de la liquidez.

En este sistema hay dos costes relevantes a considerar: (1) el coste de oportunidad (esto es, la pérdida de réditos) por mantener valores en efectivo en lugar de tenerlos en la Cartera de valores y (2) el coste de transacción que ocurre al mudar valores de la Cartera a la Caja o viceversa y que están relacionados con las comisiones percibidas por el agente o corredor que en último término realiza la operación de compra-venta. En consecuencia, el control de gestión de la liquidez supone la resolución de dos cuestiones interdependientes: la fijación del nivel óptimo de liquidez y la determinación de la periodicidad y montante de las transferencias entre la Caja y la Cartera de Inversiones (activos líquidos), pues, la mayor parte de las empresas registran entradas y salidas de caja a lo largo del tiempo que no observan un ritmo regular o predecible.

Nuestro estudio comenzará entonces por la situación donde se consideran los flujos de caja como una variable aleatoria, planteándose el interés de la aplicación de las cadenas de Markov. No obstante, si nuestro conocimiento del entorno es impreciso, como puede ocurrir en la toma de decisiones de gestión de la liquidez, el modelo debería incluir la noción de cadenas con datos borrosos en lugar de probabilidades.

Por consiguiente, el propósito de nuestro trabajo radicará en el análisis de estos instrumentos operativos en orden a evaluar distintas alternativas de sistemas de control de la tesorería de las

empresas.

2. Aplicación de las cadenas de Markov al control de gestión de la liquidez

Dado el carácter restrictivo de suponer conocido el comportamiento de los flujos de caja, la literatura contable relacionada se ha centrado en la consideración de los mismos como variables aleatorias, de ahí que los modelos propugnados en orden a determinar cuando y por cuanto deben realizarse las transferencias entre la Caja y la Cartera de Inversiones se basan principalmente en establecer unos niveles límite de caja que sirvan de guía para el responsable de la gestión de liquidez (controller).

En este sentido, a modo ilustrativo, podemos considerar que los límites superior e inferior de control del saldo de caja, tal como se muestra en la Figura 2, son *X* e *Y*, mientras que *Z* designa el saldo de caja considerado como objetivo a alcanzar. De esta forma, cuando el saldo de caja alcanza un nivel *X*, entonces se deben invertir *(X - Z)* unidades monetarias en valores; cuando el saldo desciende hasta *Y*, es preciso vender *(Z - Y)* unidades monetarias de valores o activos líquidos obteniéndose así la suma de dinero correspondiente.

Fig. 2. Perfil de evolución de los flujos de caja.

Por tanto, al controller le interesa conocer la probabilidad estimada para vender valores de la Cartera de Inversiones, por ejemplo, dos días después de haber inspeccionado el estado del saldo de caja. Esta pregunta es de su incumbencia ya que según donde se encuentre el saldo de caja deberá o no vender valores para obtener efectivo y, así, poder planificar entonces cuáles serán aquellos valores que deberá vender.

Para resolver la cuestión anterior presenta gran utilidad la noción de cadena de Markov que es un modelo de proceso aleatorio en el transcurso del tiempo y cuya característica

fundamental radica en que la probabilidad de que el sistema bajo estudio esté en una condición particular depende sólo de su condición actual.

Construyamos entonces el modelo considerado arriba para el problema del control de gestión de la liquidez mediante una cadena de Markov; para ello, supongamos un sistema *S* que puede tomar *N* estados $E_1, E_2, ..., E_N$ (*N* finito). Se admite que es posible medir o calcular la probabilidad de ocurrencia de que *S* esté en el Estado E_i, $i = 1,2,...N$ y esto para todos los momentos en tiempo discreto $n = 0,1,2,3,...$ y se escribe para estas probabilidades $p_i(n)$, $i = 1,2,...N$, $n = 0,1,2,3....$ Las $p_i(n)$ forman los elementos del conjunto de "vectores de estado" que describen el sistema para todos los momentos del futuro considerados, esto es, la probalidad de que el sistema se encuentre en el estado E_i en la fecha *n*.

$$[p(n)] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E_1 & E_2 & & E_N \\ \hline p_1(n) & p_2(n) & ..... & p_N(n) \\ \hline \end{array} \qquad (1)$$

Se establece la hipótesis de que el paso de un estado E_i a un estado E_j sólo depende de E_i y de E_j. Se supone que es posible medir o calcular la probabilidad de todo par (E_i, E_j), $i,j = 1,2....N$, que llamaremos p_{ij} sabiendo que el sistema se hallará en el estado E_j en el momento $n+1$ y está en el estado E_i en el momento *n*. Se establecen entonces como ecuaciones que rigen el sistema:

$$p_j(n+1) = \sum_{i=1}^{N} p_i(n) \cdot p_{ij} \qquad j = 1, 2,...N \qquad (2)$$

Se supone aquí que las p_{ij} no dependen de *n* (cadena estacionaria). Podemos representar (2) también bajo la forma matricial:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E_1 & E_2 & & E_N \\ \hline p_1(n+1) & p_2(n+1) & ..... & p_N(n+1) \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline E_1 & E_2 & & E_N \\ \hline p_1(n) & p_2(n) & .... & p_N(n) \\ \hline \end{array} \circ$$

$$\circ \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|} & E_1 & E_2 & & E_N \\ \hline E_1 & p_{11} & p_{12} & ... & p_{1N} \\ \hline E_2 & p_{21} & p_{22} & ... & p_{2N} \\ \hline : & : & : & \ddots & : \\ \hline E_N & p_{N1} & p_{N2} & ... & p_{NN} \\ \hline \end{array} \qquad (3)$$

en donde ∘ significa la composición "suma-producto" (filas por columnas).

Se puede escribir también de forma simplificada:

$$[p(n+1)] = [p(n)] \cdot [\,M\,] \qquad (4)$$

La matriz de transición formada por las probabilidades p_{ij}, y que se designa por [M] se

llamará "matriz estocástica" y poseerá las propiedades que se señalan a continuación:

$$p_i(n) \geq 0, \qquad j = 1,2,...N \qquad n = o,1,2,3,... \qquad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_j(n) = 1, \qquad n = o,1,2,3,... \qquad (6)$$

$$p_{ij} \geq 0, \qquad i,j = 1,2,...N \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1, \qquad i = 1,2,...N \qquad (8)$$

En particular, supongamos que la matriz de la Figura 3 describe el comportamiento del balance de caja. Los números de la columna vertical (filas) son la cantidad de dinero (unidades monetarias) en la contabilidad de caja en la mañana del día n. Los números de la fila superior (columnas) son el balance de caja en unidades monetarias (u.m.) en la mañana del día *n+1*. La tabla señala, por ejemplo, que si el balance de caja es 2 (20.000 u.m.) en el día *n,* será 1 (10.000 u.m.) el día *n+1* con probabilidad de 0.177 (el número marcado en la fila 2, columna 1, es 0.177). De esta forma, la Figura 3 muestra la matriz de transición del proceso, basado en el sistema de control descrito en la Figura 2, donde se supone una cota superior de 5 y una cota inferior de 1, con el punto de retorno igual a 2. En dicha matriz las filas 2, 3 y 4 muestran los calculos o medidas de la probabilidad de que el sistema se mueva de un estado a otro. Para deducir las probabilidades de los estados 1 ó 5 hay que recordar que cuando el controller llega el día *n* y encuentra el sistema en el estado 1 ó 5, inmediatamente lo transfiere al estado 2, de ahí que los datos de las filas 1, 5 y 2 son los mismos.

	1	2	3	4	5
1	.177	.588	.235	0	0
2	.177	.588	.235	0	0
3	0	.29	.184	.526	0
4	0	0	.324	.541	.135
5	.177	.588	.235	0	0

Fig.3. Matriz de transición del balance de caja.

La matriz estocástica de la Figura 3 es la matriz de transición de un paso para este problema, facilitándonos conocer la probabilidad de que el sistema se mueva de un estado a otro en un paso. De esta forma, para obtener la matriz de transición de dos pasos basta con multiplicar la de un paso por sí misma; con lo cual podemos generalizarlo en forma simbólica expresando que

si [M] es la matriz de transición de un paso, la matriz de transición de *n* pasos será $[M]^n$, que significa el producto de n factores iguales a [M].

La matriz de transición de *n* pasos facilita al controller contestar a la pregunta planteada anteriormente, esto es, conocer la probabilidad de que el sistema esté en un estado específico después de *n* transiciones. Para lo cual si en la expresión (4) hacemos *n = 0*, obtenemos:

$$[p(1)] = [p(0)] \text{ o } [M]$$

En forma semejante, $[p(2)] = [p(1)] \text{ o } [M]$ y por sustitución,

$$[p(2)] = [p(1)] \text{ o } [M] = [p(0)] \text{ o } [M] \text{ o } [M] = [p(0)] \text{ o } [M]^2$$

Por lo tanto, se podrá escribir la expresión (4) como sigue:

$$[p(n)] = [p(0)] \text{ o } [M]^n \qquad (9)$$

en donde *p(0)* es el vector de probabilidades de encontrar el sistema en un estado particular en el instante 0, esto es, cuando se inspecciona el sistema por primera vez.

En nuestro caso de aplicación, supóngase que el controller llega el lunes por la mañana y comprueba que el sistema está en el estado 3 (30.000 u.m.) y desea saber la probabilidad de encontrar el sistema en el estado 1 el miércoles por la mañana, ya que entonces deberá vender valores para obtener dinero y le convendrá determinar por adelantado cuáles valores de su cartera deberá vender.

De acuerdo con la expresión (9), obtenemos

$$[p(2)] = [p(0)] \circ [M]^2 =$$

$$= \quad [0\ 0\ 1\ 0\ 0] \quad \circ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline .135 & .518 & .223 & .124 & 0 \\ \hline .135 & .518 & .223 & .124 & 0 \\ \hline .051 & .224 & .272 & .381 & .071 \\ \hline .024 & .173 & .267 & .463 & .073 \\ \hline .135 & .518 & .223 & .124 & 0 \\ \hline \end{array} =$$

$$= [.051 \ \ .224 \ \ .272 \ \ .381 \ \ .071]$$

Puesto que el dato de la columna 1 es 0.051, el controller sabe que la probabilidad de tener que transferir fondos de la cartera a la caja es sólo de 0.051 con lo cual no parece prudente dedicar mucho tiempo a determinar qué valores se venderían si hubiese necesidad de ello el miércoles.

Por otro lado, la expresión (9) también puede utilizarse para especificar la probabilidad de que el sistema se mueva de un estado a otro en cualquier número de transiciones si las

probabilidades de un paso no cambian con el tiempo, lo cual nos conduce a la consideración de las probabilidades estacionarias, es decir, la propiedad ergódica en una cadena de Markov (KAUFMANN, 1966).

De esta forma, si $\lim_{n\to\infty} [M]^n = [M]$

donde [M] es una matriz estocástica sin ningún elemento nulo, se dice que el sistema es ergódico, que posee un régimen permanente. La matriz [M] que posee esta propiedad se denomina *matriz ergódica*. Hay una prueba en dos partes que dice si una cadena de Markov es ergódica: *(a)* debe haber una probabilidad positiva de que se pueda pasar de un estado *i* a otro cualquiera *j* si hay suficientes transiciones y *(b)* debe existir al menos un estado con probabilidad positiva de que el sistema permanezca en él después de una transición.

Si [M] es tal que todas sus líneas son idénticas entonces se dice que el sistema es *"completamente ergódico"*, y en este caso, para *n* suficientemente grande, el estado del sistema no depende del estado inicial. En efecto:

$$[p(n)] = [p(0)] \text{ o } [M]^n$$

$$\lim_{n\to\infty} [p(n)] = [p(0)] \text{ o } [M] \qquad (10)$$

$$= [p]$$

en donde *[p]* es una de las filas idénticas de [M].

Para calcular las probabilidades asindóticas [p] se disponen de varios métodos, uno de los más sencillos, especialmente si se puede utilizar la opción de multiplicación de matrices incluída en la mayoría de las Hojas Electrónicas de Cálculo, consiste en calcular $[M]^n$ hasta que $[M]^{n+1} = [M]^n$.

[M]

.177	.588	.235	0	0
.177	.588	.235	0	0
0	.29	.184	.526	0
0	0	.324	.541	.135
.177	.588	.235	0	0

∘

[M]

.177	.588	.235	0	0
.177	.588	.235	0	0
0	.29	.184	.526	0
0	0	.324	.541	.135
.177	.588	.235	0	0

=

$[M]^2$

.135	.518	.223	.124	0
.135	.518	.223	.124	0
.051	.224	.272	.381	.071
.024	.173	.267	.463	.073
.135	.518	.223	.124	0

. . . . . .
. . . . . .

$$[M]^{16} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline .083 & .348 & .248 & .284 & .038 \\ \hline .083 & .348 & .248 & .284 & .038 \\ \hline .083 & .347 & .248 & .284 & .038 \\ \hline .083 & .347 & .248 & .284 & .038 \\ \hline .083 & .348 & .248 & .284 & .038 \\ \hline \end{array}$$

$$[M]^{17} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline .083 & .347 & .248 & .284 & .038 \\ \hline .083 & .347 & .248 & .284 & .038 \\ \hline .083 & .347 & .248 & .284 & .038 \\ \hline .083 & .347 & .248 & .284 & .038 \\ \hline .083 & .347 & .248 & .284 & .038 \\ \hline \end{array}$$

En nuestro caso de aplicación, tenemos

[p] = [.083 .347 .248 .284 .038]

Podemos observar que $p(1) = 0.083$ y como hay 260 días laborales en el año, entonces el número de veces en las que el sistema estará en el estado 1 en dicho año será de 0,083 x 260 = 21.58 veces. Por consiguiente, "en promedio" habrá que mover valores de la Cartera a la Caja 21.58 veces por año y una vez cada 260/21,58 ≃ 12 días. Un análisis similar para el estado 5 produce 0.038 x 260 = 9.88 movimientos de la Caja a la Cartera por año.

Esta información presenta gran interés en la planificación de la periodicidad y montante de las transacciones entre la Caja y la Cartera de inversiones.

No obstante, a pesar del atractivo de la aplicación de las cadenas de Markov, conviene recordar que para poder aplicar una probabilidad es necesario tener, en primer lugar, una sucesión de fenómenos que se hayan repetido en unas determinadas condiciones y, en segundo lugar, poder aplicar los resultados obtenidos sobre otro fenómeno sometido a las mismas condiciones que las anteriores. En este sentido, existen situaciones en que no es posible utilizar probabilidades, cuando existe incertidumbre en lugar de azar. Si nuestro conocimiento del entorno es impreciso, como ocurre en la toma de decisiones de gestión de la liquidez, el modelo debería incluir la noción de cadenas con datos borrosos en lugar de probabilidades.

2. Aplicación de las cadenas inciertas de Kaufmann y Gil Aluja al control de gestión de la liquidez

En un ambiente de incertidumbre el modelo debe incluir la noción de nivel de presunción, esto es, en lugar de una ley de probabilidad se deben tomar leyes de posibilidad. A este respecto, la propuesta de KAUFMANN y GIL ALUJA (1991) está basada en la teoría markoviana, aunque presenta modificaciones importantes, pues, al situarse en ambiente de incertidumbre se no emplean probabilidades sino datos borrosos.

Construyamos entonces el modelo considerado anteriormente para el problema de la gestión de liquidez, ahora en ambiente de incertidumbre, mediante una "cadena incierta de Kaufmann y Gil Aluja". Para ello, siguiendo a dichos autores, supongamos un sistema *S* cuyo conjunto de estados es $E = \{E_1, E_2, \ldots E_N\}$ (N finito). Se admite que es posible valuar en [0, 1] la posibilidad de ocurrencia de que *S* se encuentre en el estado E_i, $i = 0, 1, 2 \ldots N$ y esto para todas las fechas $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y que se designan estas posibilidades $q_i(n)$, $i = 0, 1, 2, \ldots N$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Las $q_i(n)$ forman los elementos del conjunto de vectores de estado que describen el sistema para todos los momentos futuros considerados.

$$[q(n)] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline E_1 & E_2 & E_N \\ \hline q_1(n) & q_2(n) & q_N(n) \\ \hline \end{array} \qquad (11)$$

Se establece la hipótesis que las $q_i(n)$ forman una ley de posibilidad para todo *n*, es decir, que se tiene que:

$$\bigvee_{i=1}^{N} q_i(n) = 1 \qquad (12)$$

En otras palabras, por lo menos uno de los estados tiene la posibilidad 1.

Se parte también de la hipótesis que la posibilidad de paso de un estado E_i, a un estado E_j sólo depende de E_i y de E_j. Se supone que se puede valuar la posibilidad de todo par (E_i, E_j), $i,j = 1, 2, \ldots N$, es decir, q_{ij}, sabiendo que el sistema se hallará en el estado E_j en el momento $n+1$ y está en el estado E_i en el momento *n*. Se establece entonces como ecuación que rige el sistema:

$$q_j(n+1) = \bigvee_{i=1}^{N} \left(q_i(n) \wedge q_j(n)\right), \; j = 1, 2, \ldots N \qquad (13)$$

Se supone aquí que las q_{ij} no dependen de *n* (cadena estacionaria). Por otra parte:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots N\} : \; \exists j \in \{1, 2, \ldots N\}$$

$$\bigvee_{i=1}^{N} q_{ij} = 1 \qquad (14)$$

Esto es, cada fila de la relación contiene por lo menos un 1.

De esta manera, las q_{ij} forman una relación borrosa normal que se va a denominar "matriz incierta" por comparación con la "matriz estocástica" y, a su vez, el sistema construído en base a la misma se denominará "cadena incierta" (sobreentendiéndose con filas normales).

Podemos representar de nuevo la expresión (13) ahora bajo forma matricial:

E_1	E_2		E_N	
$q_1(n+1)$	$q_2(n+1)$	.....	$q_N(n+1)$	=

	E_1	E_2	E_N		E_1	E_2		E_N	
=	$q_1(n)$	$q_2(n)$	$q_N(n)$	*	E_1	q_{11}	q_{12}	...	q_{1N}	(15)
					E_2	q_{21}	q_{22}	...	q_{2N}	
						:	:	⋱	:	
					E_N	q_{N1}	q_{N2}	...	q_{NN}	

en donde * significa la composición maxmin (filas por columnas), o también

$$\mu_N(x, z) = \bigvee_y (\mu_N(x, y) \wedge \mu_N(y, z)) \qquad (16)$$

Dado que las $q_i(n)$ y q_{ij} son valuaciones, tendrá que cumplirse que:

$$q_j(n) \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots N \qquad n = 0, 1, 2, 3,... \qquad (17)$$

$$\bigvee_{j=1}^{N} q_j(n) = 1, \qquad n = 0, 1, 2, 3,... \qquad (18)$$

$$q_{ij} \geq 0 \qquad (19)$$

$$\bigvee_{j=1}^{N} q_{ij}(n) = 1, \qquad i = 1, 2,... N \qquad (20)$$

Se escribirá también (15) bajo la forma simplificada:

$$[q(n+1)] = [q(n)] * [N] \qquad (21)$$

en donde [N] es la matriz formada por las valuaciuones q_{ij} introducida en (15). De esta manera [N] es una relación borrosa de filas normales según la terminología de la teoría de los

subconjuntos borrosos. En el supuesto de que las q_{ij} dependan del tiempo y sean $q_{ij}(n)$ entonces [N(n)] representa una cadena llamada *"no estacionaria"*.

Podemos ampliar nuestra consideración, por el interés pedagógico que presenta, a la noción de relaciones **Φ**-borrosas normales.

Una relación **Φ**-borrosa normal posee valuaciones constituídas por intervalos de confianza de [0, 1] en lugar de estimaciones en [0, 1]. Por ello se afectará a cada transición un intervalo de confianza:

$$[a_1, a_2] \subset [0, 1] \qquad 0 \le a_1 \le a_2 \le 1 \qquad (22)$$

pero, dado que la relación es normal, existirá siempre por lo menos un 1 en cada fila.

Conviene recordar también que:

$$[a, a] = a \qquad a \in [0, 1] \qquad (23)$$

$$[a_1, a_2] (\wedge) [b_1, b_2] = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2] \qquad (24)$$
$$[a_1, a_2] (\vee) [b_1, b_2] = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2] \qquad (25)$$

La composición maxmin se realizará con los intervalos de confianza de la misma manera que con los valores de [0, 1], respetando (23), (24) y (25). Los intervalos de confianza de [0, 1] son conmutativos, asociativos, distributivos, etc..., tienen las mismas propiedades algebraicas que los valores de [0, 1]. En definitiva, una cadena **Φ**-borrosa normal puede tratarse de la misma manera que una cadena borrosa normal, aunque para diferenciarlas a efectos simbólicos, se exprese por [N].

En particular, supongamos que la matriz de la Figura 4 describe el comportamiento estimado como posible del balance de caja. Los números de la primera columna vertical (filas) son la cantidad de dinero (u.m.) en la contabilidad de caja en la mañana del día *n*. Los números de la fila superior (columnas) son el balance de caja en unidades monetarias en la mañana del día *n+1*. La tabla señala que, por ejemplo, si el balance de caja es 2 en el día *n*, la posibilidad de que sea 1 el día *n+1* es de [0.2, 0.4] (el número marcado en la fila 2, columna 1, es de [0.2, 0.4]).

	1	2	3	4	5
1	[.2, .4]	1	[.3, .5]	0	0
2	[.2, .4]	1	[.3, .5]	0	0
3	0	[.4, .7]	.35	1	0
4	0	0	.6	1	[.1, .4]
5	[.2, .4]	1	[.3, .5]	0	0

Fig. 4. Relación **Φ**-borrosa normal del balance de caja.

De esta forma, la Figura 4 muestra la matriz incierta de transición donde se supone a efectos

del sistema de control de gestión de la liquidez, una cota superior de 5 y una cota inferior de 1, con el punto de retorno igual a 2. En dicha matriz, las filas 2, 3 y 4 muestran las valuaciones (opinión subjetiva) de que el sistema se mueva de un estado a otro y las filas 1 y 5 se deducen de forma semejante que en el caso descrito en el epígrafe anterior.

Esta relación **Φ**-borrosa normal facilita al controller contestar a la pregunta sobre el nivel de presunción de que el sistema se encuentre en un estado específico en un momento futuro cercano, pues, al utilizar valuaciones, resultará interesante conocer, a partir de estos datos subjetivos, los resultados para los que la presunción es más elevada.

Para ello, de forma similar a lo considerado en la expresión (10), se calculará $[N]^n$ hasta que $[N]^{n+1} = [N]^n$, donde se tiene

$$\lim_{n \to \infty} [N]^n = [N^*]$$

No obstante, con la composición maxmin es conveniente adoptar como relación **Φ**-borrosa normal límite el cierre transitivo [N], es decir:

$$[N] = [N] \cup [N]^2 \cup [N]^3 ..... \qquad (26)$$

ya que, exceptuando el caso en que [N] es reflexiva no siempre se cumple que $[N]^{n+1} \supset [N]^n$ y el camino más "fuerte" en el grafo valuado se obtiene considerando el cierre transitivo.

En nuestro caso de aplicación tenemos:

[N] [N]

.2,.4	1	.3,.5	0	0
.2,.4	1	.3,.5	0	0
0	.4,.7	.35	1	0
0	0	.6	1	.1,.4
.2,.4	1	.3,.5	0	0

*

.2,.4	1	.3,.5	0	0
.2,.4	1	.3,.5	0	0
0	.4,.7	.35	1	0
0	0	.6	1	.1,.4
.2,.4	1	.3,.5	0	0

=

$[N]^2$

=

[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	0
[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	0
[.2, .4]	[.4, .7]	.6	1	[.1, .4]
[.1, .4]	[.4, .7]	.6	1	[.1, .4]

[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	0

$[N]^3 =$

[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	[.1, .4]
[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	[.1, .4]
[.2, .4]	[.4, .7]	.6	1	[.1, .4]
[.2, .4]	[.4, .7]	.6	1	[.1, .4]
[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	[.1, .4]

$[N]^4 =$

[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	[.1, .4]
[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	[.1, .4]
[.2, .4]	[.4, .7]	.6	1	[.1, .4]
[.2, .4]	[.4, .7]	.6	1	[.1, .4]
[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	[.1, .4]

Nos detenemos: $[N]^4 = [N]^3$ y se obtiene

$[N] =$

[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	[.1, .4]
[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	[.1, .4]
[.2, .4]	[.4, .7]	.6	1	[.1, .4]
[.2, .4]	[.4, .7]	.6	1	[.1, .4]
[.2, .4]	1	[.3, .5]	[.3, .5]	[.1, .4]

En nuestro caso de aplicación, supóngase entonces que el controller llega el lunes por la mañana y comprueba que el sistema está en el estado 3 y desea saber cual es la posibilidad de encontrar el sistema en el estado 1 el miércoles por la mañana, ya que entonces deberá vender valores para obtener dinero y a él le convendrá planificar cuáles valores de su cartera deberá vender.

De esta forma, tenemos:

1	2	3	4	5			
0	0	1	0	0	*	[N]	=

	1	2	3	4	5
=	[.2, .4]	[.4, .7]	.6	1	[.1, .4]

Por tanto, si el estado inicial del sistema se encuentra en 3 en un momento futuro cercano el máximo de presunción se encontrará en 4. No obstante, centrándonos en la cuestión planteada arriba, podemos observar que se supone una posibilidad de [0.2, 0.4] que el sistema esté en el estado 1 el miércoles.

Por otro lado, conviene señalar que, al utilizar la concepción del máximo de presunción, carece de sentido la noción de estado persistente. En otras palabras, no podemos decir que el número de veces en las que el sistema estará en el estado 1 durante el año sea de 260 x [0.2, 0.4] = [52, 104].

Sin embargo, sí es posible, en lugar de pretender llegar al caso límite, plantear la situación en el futuro después de algunas etapas relativamente cortas. Si las matrices correspondientes tienen un número reducido de estados, estos cálculos pueden tener una significación real mientras que en el caso contrario se necesitará la intervención de una bola de cristal.

4. Análisis comparativo

El objetivo del presente epígrafe consiste en analizar con mayor detalle las principales diferencias que presentan las cadenas inciertas de Kaufmann y Gil Aluja frente a las cadenas de Markov.

A este respecto, las consideraciones efectuadas anteriormente nos ha permitido observar la necesidad de disponer de técnicas operativas distintas atendiendo al ambiente aleatorio o incierto en que se desarrolla el ámbito de aplicación de las mismas, lo cual supone tener en cuenta una ley de probabilidad en el primer caso mientras que se deben tomar leyes de posibilidad en el segundo.

No obstante, existe un gran paralelismo entre la teoría de probabilidades y la de posibilidades: en la primera, el axioma fundamental es la aditividad en la medida; en la segunda, el axioma fundamental es la monotonía en la inclusión para toda valuación.

A modo de ejemplo ilustrativo podríamos retomar el problema del controller que llega el lunes por la mañana y comprueba que el sistema está en el estado 2 (20.000 u.m.) y le interesa conocer bien la probabilidad (en el caso de considerar el flujo de caja como una variable aleatoria) o bien la posibilidad (si el flujo de caja es una variable incierta) de encontrar el sistema en el estado 3 el miércoles por la mañana.

En el primer caso, el estudio de la aplicación de las cadenas de Markov nos ha permitido observar como el cálculo de las probabilidades de transición de dos, tres o, de hecho de *n* pasos, consiste en hacer una lista de todas las rutas, encontrar la probabilidad de cada una y sumarlas

todas, lo cual, como ya se mencionó y es de sobra conocido, nos acerca al concepto de multiplicación de matrices (composición suma-producto) como base conceptual del encadenamiento markoviano.

En nuestro ejemplo de aplicación, la probabilidad de que el controller encuentre el sistema en el estado 3 después de dos pasos, si el estado incial era 2, es de 0.223 que se obtiene como sigue a continuación:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_2	0.177	0.588	0.235	0	0

$\circ$

	c_3
b_1	0.235
b_2	0.235
b_3	0.184
b_4	0.324
b_5	0.235

$=$

	c_3
a_2	0.223

$P(a_2\ c_3) = [(a_2\ b_1) \cdot (b_1\ c_3)] + [(a_2\ b_2) \cdot (b_2\ c_3)] + [(a_2\ b_3) \cdot (b_3\ c_3)] + [(a_2\ b_4) \cdot (b_4\ c_3)] + [(a_2\ b_5) \cdot (b_5\ c_3)] = [0.177 \cdot 0.235] + [0.588 \cdot 0.235] + [0.235 \cdot 0.184] + [0 \cdot 0.324] + [0 \cdot 0.235] \approx 0.223$

Sin embargo, en un ambiente de incertidumbre el encadenamiento con datos borrosos se efectuará mediante la composición maxmin, tomando las valuaciones mínimas y después la el máximo de los mínimos. En nuestra aplicación, si al controller le interesara conocer cuál es la posibilidad de que después de dos pasos el sistema se encuentre en el estado 3, si el estado inicial fuera 2, operaría como sigue a continuación:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_2	.2, .4	1	.3, .5	0	0

$*$

	c_3
b_1	.3, .5
b_2	.3, .5
b_3	.35
b_4	.6
b_5	.3, .5

$=$

	c_3
a_2	.3, .5

$\mu(a_2\ c_3) = [(a_2\ b_1) \wedge (b_1\ c_3)] \vee [(a_2\ b_2) \wedge (b_2\ c_3)] \vee [(a_2\ b_3)\ (b_3\ c_3)] \vee [(a_2\ b_4) \wedge (b_4\ c_3)] \vee [(a_2\ b_5) \wedge (b_5\ c_3)] = [(0.2, 0.4) \wedge (0.3, 0.5)] \vee [\ 1 \wedge (0.3, 0.5)] \vee \vee [(0.3, 0.5) \wedge 0.35] \vee [\ 0 \wedge 0.6] \vee [\ 0 \wedge (0.3, 0.5)] = [0.3, 0.5]$

5. Conclusiones

En este trabajo se estudian técnicas operativas interesadas en facilitar alcanzar los dos objetivos principales en la toma de decisones de gestión de la liquidez: la fijación del nivel óptimo de liquidez y la determinación de la periodicidad y el montante de las transferencias entre la caja y la cartera de valores. No obstante, este estudio se ocupó especialmente del segundo objetivo. De esta forma, se ha analizado en primer lugar la utilidad que presenta la aplicación de las cadenas de Markov cuando se consideran los flujos de tesoreria como una variable aleatoria.

Sin embargo, existen situaciones en que no es posible utilizar probabilidades, es decir, cuando existe incertidumbre en lugar de aleatoriedad, como sucede en el control de gestión de tesoreria borrosa. De ahí que el modelo debe incluir la noción de cadenas con datos borrosos en lugar de probabilidades desarrollada por KAUFMANN y GIL ALUJA (1991). Por consiguiente, en este estudio se ha contrastado la utilidad que presentan las "cadenas inciertas de Kaufmann y Gil Aluja", donde el encadenamiento se hace mediante operadores asociados máximo-mínimo (la decisión más procedente), mientras que el encadenamiento markoviano se realizaba a través de operadores asocidados suma-producto (el que decide se considera que es objetivo y siempre el más objetivo).

6. Referencias bibliográficas

CHANAS, S. and KOLODZIEJYK, W.: "Maximun flow in a network with fuzzy arc capacities". Fuzzy Sets & Systems. Vol. 8, Nº 2, August 1982, pp. 165-174.

CZOGALA, E. and ZIMMERMANN, H.J.: "The aggregation opperations for deciºsion-making in probabilistic fuzzy environment". Fuzzy Sets & Systems. Vol. 13, Nº 3, August 1984, pp. 223-240.

DELGADO, M. et al.: "Some structural and optimization problems on fuzzy graphs". In KULIKOWSKI, R. and RUDNICKI, J. (eds.): "System Analysis and Computer Science". Omnitech Press. Poland, 1990, pp. 47-63.

FEDRIZZI, M. et. al. (eds.): "Interactive Fuzzy Optimization". Springer-Verlag. Berlin, 1991.

GIL ALUJA, J.: "El estudio dinámico de la elección de inversiones". Técnica Contable, Febrero 1967, págs. 41-50 y 66.

GIL LAFUENTE, A.M.: "El análisis financiero en la incertidumbre". Ariel. Barcelona, 1990.

ITAKURA, H. and NISHIKAWA, Y.: "Fuzzy network technique for technological forecasting". Fuzzy Sets & Systems. Vol 14, Nº 2, November 1984, pp. 99-114.

KAUFMANN, A.: "Métodos y Modelos de la programación matemática". CECSA. México, 1966.

KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J.: "Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas". Milladoiro. Santiago de Compostela, 1986.

KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J.: "Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre". Hispano Europea. Barcelona, 1987.
KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J.: "Modelos para la investigación de efectos olvidados". Milladoiro. Santiago de Compostela, 1988.
KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J.: "Las matemáticas del azar y de la incertidumbre". Centro de Estudios Ramón Areces. Madrid, 1990.
KAUFMANN, A. y GIL ALUJA, J.: "Nuevas técnicas para la dirección estratégica". Universidad de Barcelona. Barcelona, 1991.
ZIMMERMANN, H.J.: "Using fuzzy sets in operations research". European Journal of Operations Research, Vol. 13, Nº 3. 1983, pp. 201-216.